

# 疲労荷重を受ける部材

## —Fatigue: Members Subjected to Repeated Loads—

東京都市大学 都市工学専攻 高橋優輔

構造材料が繰返し応力を受けるとき、その最大応力が静的強度より小さい範囲であってもそれが多数繰返されることにより破壊に至ることがある。この現象を疲労 (fatigue)、あるいは疲労破壊 (fatigue failure) と呼ぶ。疲労特性は、作用応力と破壊に至るまでの繰返し回数 (疲労寿命) との関係を示すいわゆる S-N 線図により表され、設計に用いられる。

道路・鉄道構造物や海洋構造物等は疲労荷重 (繰返し荷重) を受ける構造物の代表であり、疲労破壊に対する安全照査を的確に行う必要がある。これは、終局限界に対して十分余裕があり、また使用限界に対して検討されていた構造物であっても疲労破壊に対する安全性 (疲労限界状態) については必ずしも十分でないことを意味する。

疲労限界は設計上考慮すべき限界状態の一つであるが、経年劣化による耐力低下もしくは耐久性の問題としても考えられる。即ち、新設構造物の設計要件のみならず既存構造物の残存耐力や余寿命の評価としても疲労問題を考える必要がある。

### 目次

1. 疲労荷重と疲労強度	2
(1) 疲労荷重	2
(2) 疲労強度	2
2. 疲労強度式	3
(1) コンクリート	3
(2) 鉄筋	4
3. 疲労設計法	5
4. 数値計算	6
(1) 諸係数の算出	6
(2) 設計繰返し回数 $n_d$ に対する材料設計疲労強度の計算	6
(3) 疲労寿命 $N$ の算出及び $n_d$ に対する安全性の照査	7
(4) 照査の一覧化と S-N 線図の図示	8
5. 考察	9
参考文献	9

## 1 疲労荷重と疲労強度

(1)疲労荷重

構造物は完成した瞬間から自重(死荷重・永久荷重)が負荷されてそれらが永続的に続くとともに、供用開始後から交通荷重(活荷重)が繰返し作用し、死荷重に重畳される。これを疲労強度の観点から考えると、上限荷重=死荷重+活荷重、下限応力=死荷重、応力振幅=活荷重(変動荷重)となる。因みに、使用限界照査におけるひび割れの計算では、設計荷重=永久荷重+k<sub>2</sub>変動荷重(0<k<sub>2</sub><1)の様に処理され、変動荷重の持続性が重要となる。図1に、道路構造物が受ける交通荷重の変動を示す。

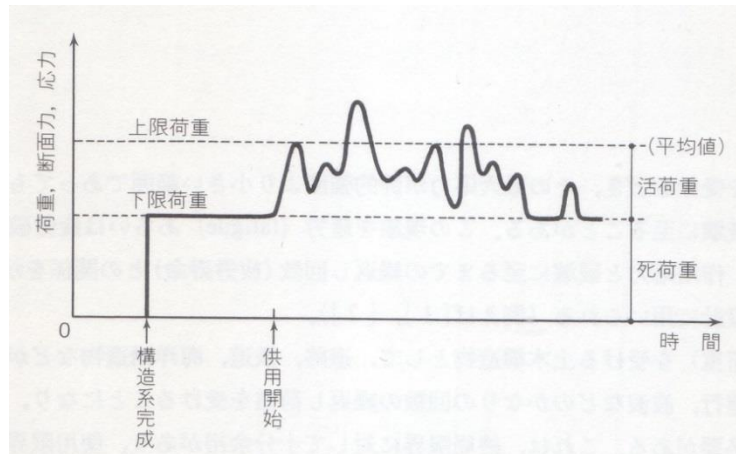


図1 道路構造物が受ける交通荷重の変化

(2)疲労強度

材料の疲労強度は通常、図2のようなS-N線図で表される。縦軸は応力パラメータで普通目盛(または対数目盛)、横軸は破壊に至るまでの繰返し回数(疲労寿命)で対数目盛を用いて表されることが多い。応力パラメータは、上限応力(上限応力比)または応力振幅が用いられるが、なお議論されている。

従って、例えば応力パラメータ(例えば応力振幅)が大きくなるほど、破壊までの繰返し回数は少なくなりS-N線図は左上りとなる。高応力振幅による少ない回数での疲労破壊を低サイクル疲労といい、逆に低応力振幅による高回数での破壊を高サイクル疲労という。但し、コンクリートではこのような区別はあまり議論されない。

また、ある応力以下になると何回载荷しても疲労破壊しなくなる。これを疲労限 (fatigue limit、または threshold) というが、コンクリートや鉄筋においてはまだ明確な定義がなされていない。

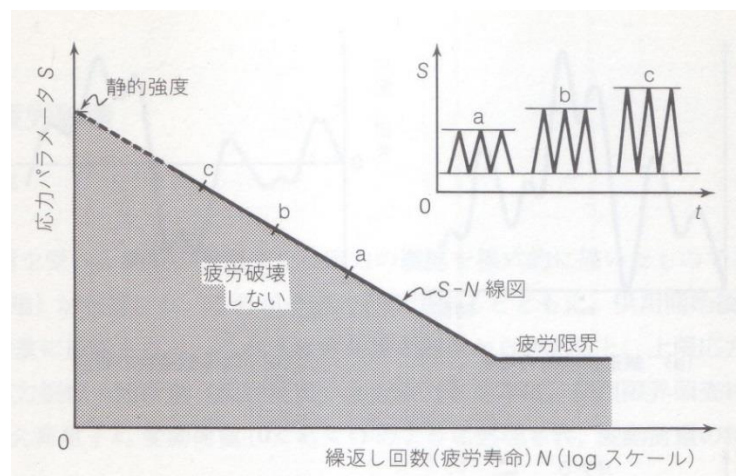


図2 疲労強度のS-N線図

2 疲労強度式

(1)コンクリート

まず、コンクリートの S-N 線図を模式的に表すと、図 3 のような 2 例にまとめることができる。

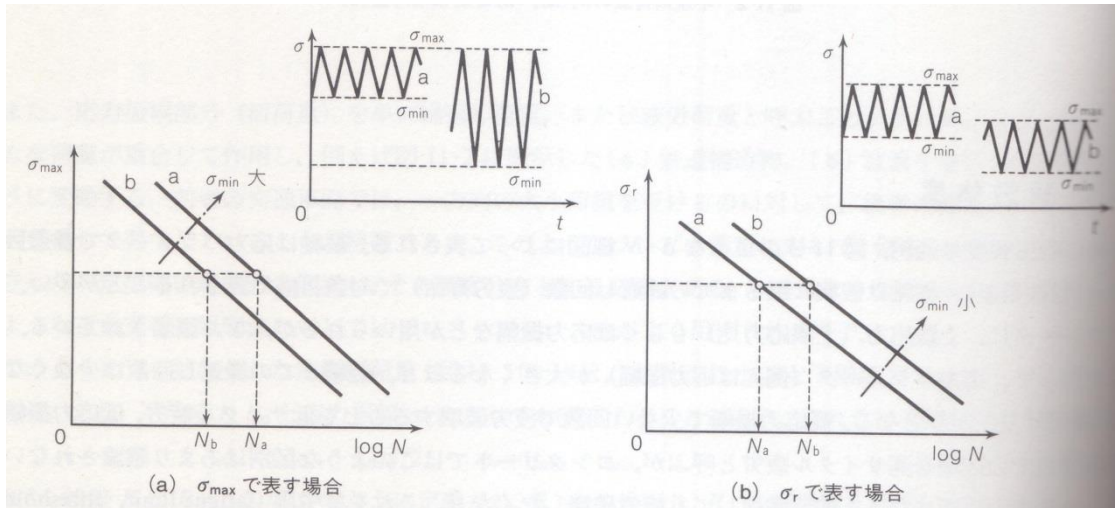


図 3 コンクリートの S-N 線図

応力パラメータとして (a)  $\sigma_{max}$  を用いると、 $\sigma_{min}$  が大きくなるほど長寿命となるのに対して、(b) では  $\sigma_r$  で表しているため、 $\sigma_{min}$  が大きくなると疲労寿命が短くなる。即ち、コンクリートの疲労特性は  $\sigma_{max}$ 、 $\sigma_{min}$ 、 $\sigma_r$  のいずれか 2 個の応力パラメータに依存することが示される。そこで、一定応力の繰り返しによるコンクリートの疲労強度は、次式のような上限応力と下限応力を用いた S-N 線式によって表されることがよく知られている。

$$\text{Goodman 型} : \log N = K \frac{1 - S_{max}}{1 - S_{min}} \tag{11.2}$$

$$\text{Smith 型} : \log N = K \frac{1 - S_{max}}{1 - \frac{S_{min}}{S_{max}}} \tag{11.3}$$

ここで、 $S_{max}$  及び  $S_{min}$  は静的強度  $f_k$  で正規化した上限応力比  $S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{f_k}$  と下限応力比  $S_{min} = \frac{\sigma_{min}}{f_k}$  である。

式(11.2)は現行標準示方書の原型となっているので、特にその特徴を考えたい。そこで、式(11.2)を上限応力  $\sigma_{max}$  によって書き換えると、

$$\frac{\sigma_{max}}{f_k} = \frac{\log N}{K} \times \frac{\sigma_{min}}{f_k} + \left(1 - \frac{\log N}{K}\right) \tag{11.4a}$$

のように表すことができる。これを応力振幅  $\sigma_r = \sigma_{max} - \sigma_{min}$  で表すと、

$$\frac{\sigma_r}{f_k} = \left(1 - \frac{\log N}{K}\right) \left(1 - \frac{\sigma_{min}}{f_k}\right) \tag{11.4b}$$

のようになる。なお両式とも下限応力がパラメータとなっている。

[標準示方書の疲労強度式]

式(11.4)を用いて、同式を  $\sigma_r \rightarrow f_{rd}$ 、 $\sigma_{min} \rightarrow \sigma_p$  ( $p$ =permanent : 永久荷重)、 $f_k = f_d$  のように読み替えると、示方書の設計疲労強度(振幅) $f_{rd}$ を得る。

$$f_{rd} = k_{1f} f_d \left(1 - \frac{\sigma_p}{f_d}\right) \left(1 - \frac{\log N}{K}\right) \quad (\text{但し、} N \leq 2 \times 10^6) \quad (11.5)$$

ここで、 $K=10$ ：水中コンクリート、軽量コンクリート、 $K=17$ ：一般のコンクリート  
 $k_{1f}=0.85$ (圧縮、曲げ圧縮)、 $k_{1f}=1.0$ (引張、曲げ引張)

これは、コンクリートの圧縮、曲げ圧縮、引張及び曲げ引張の設計疲労強度  $f_{rd}$  を共通に表している。従って、 $f_d$ ：静的設計強度は、圧縮強度の場合  $f'_{cd}=f'_{ck}/\gamma_c$ 、曲げ強度のとき  $f'_{bd}=f'_{bk}/\gamma_c$  のように与えることになる(なお  $\gamma_c$  は一般に 1.3 とする)。また、 $\sigma_p$  は永久荷重による下限応力を表し、通例  $R>0$  なる片振りを考えるが、交番荷重を受ける場合( $R>0$ )は  $\sigma_p=0$  とする。

## (2) 鉄筋

鉄筋の疲労強度は、コンクリートの場合と同様に応力振幅と下限応力の影響を受ける。また、異型鉄筋のように節がある場合の疲労強度は丸鋼の場合より小さくなり、これは節周辺の応力集中によるものである。標準示方書では、異型鉄筋に対して次式のような疲労設計強度(振幅)  $f_{srd}$  を用いることにしている。

$$f_{srd} = \frac{190 \cdot 10^\alpha \left(1 - \frac{\sigma_{sp}}{f_{ud}}\right)}{\gamma_s} \quad (\text{但し、} N \leq 2 \times 10^6) \quad (11.6a)$$

ここで、

$f_{srd}$ ：鉄筋の設計疲労強度

$\sigma_{sp}$ ：鉄筋に作用する最小応力(永久荷重)

$f_{id}$ ：鉄筋の設計引張強度

(いずれも  $N/mm^2$ )

$k=0.12$ 、 $\alpha=k_0\phi(0.81-0.003\phi)$ 、 $\phi$ ：異型鉄筋(呼び径 mm)

$k_0\phi$ ：一般に 1.0 としてよい。節の根元に円弧が無いもので節と鉄筋軸との成す角度が 60 度未満の場合、

$k_0=1.05$ 、節の根元に円弧がある場合  $k_0=1.10$

$\gamma_s$ ：鉄筋の材料係数で一般に 1.05 とする

上式では、 $\alpha$  が鉄筋直径の影響( $\phi$  が大きくなるほど  $\alpha$  は小さい)、 $k_0$  が節形状の影響を表す係数で、異型鉄筋特有のものである。また上式は両辺に対数を取り整理すると、

$$\log f_{srd} = \log \left\{ \frac{190 \cdot 10^\alpha}{\gamma_s} \left(1 - \frac{\sigma_{sp}}{f_{ud}}\right) \right\} - k \log N \quad (11.6b)$$

のようになり、 $f_{srd}$  と  $N$  の関係が両対数グラフで直線となることがわかる。

## 3 疲労設計法

疲労荷重を受ける部材の限界状態(疲労限界状態)に対する安全性の照査は、

①設計疲労回数を規定し、応力レベルで照査する方法

- ②設計疲労回数を規定し、断面力レベルで照査する方法
  - ③設計疲労回数と設計疲労寿命(回数レベル)によって照査する方法
- に分類することができる。

### ①応力レベルによる照査

使用期間中における予想される繰り返し回数  $n_d$  (変動荷重の場合、換算回数に直されているものとする) を設定し、これに対応する疲労強度  $f_{rk}$  を算出し、材料係数  $r_m$  により設計疲労強度  $f_{rd}$  を求める。一方、設計変動断面力  $S_{rd} = \gamma_a S_r$  から得られる設計応力振幅  $\sigma_{rd}$  を求めて両者を比較する。すなわち、

$$\gamma_i \frac{\sigma_{srd}}{f_{srd}} \leq 1.0 \quad (11.25)$$

とする。

### ②断面力レベルによる照査

上記の疲労強度  $f_{rd}$  を疲労断面耐力  $R_r$  に置き換え、これら設計疲労断面耐力  $R_{rd} = R_r / \gamma_b$  を求め、一方の設計断面耐力  $S_{rd}$  と比較する。すなわち、

$$\gamma_i \left( \frac{S_{rd}}{R_{rd}} \right) \leq 1.0, R_{rd} = \frac{R_r(f_{rd})}{\gamma_b} \quad (11.26)$$

とする。

ここで、 $\gamma_m$ :材料係数、 $\gamma_b$ :部材係数、 $\gamma_a$ :構造解析係数(割増し係数)、及び  $\gamma_i$ :構造物係数(最終的な安全率)である。

①と②における応力・強度又は断面力は、通例変動分(振幅)が用いられている。なお、断面の疲労耐力と疲労強度の関係( $R_f$ - $f_r$ 関係)または断面力と応答する材料の応力との関係( $S_r$ - $\sigma_r$ 関係)は通例、線形関係式で与えられるので上記の①及び②は等価となる。

### ③疲労回数による照査

今度は、設計変動応力  $\sigma_{rd}$  から、S-N 線図を通して設計疲労寿命  $N_d$  を算出することができるので、これを与えられた設計繰り返し回数  $n_d$  と対比させ ( $n_d < N_d$ )、安全性を確認することが可能となる。例えば、上記①、②と同じ式で表現しようとするならば、

$$\gamma_i \left( \frac{n_d}{N_d} \right) \leq 1.0, \text{ または } \gamma_i \left( \frac{\log n_d}{\log N_d} \right) \leq 1.0 \quad (11.27)$$

のように記述することができる。但し、ここで用いている構造物係数  $\gamma_i$  については、①と②では異なるもので、合理的かつ適正な値を設定する必要がある。

ここで、コンクリート標準示方書による疲労設計法について述べるが、梁部材やスラブの曲げとせん断(補強筋を有する場合)では上記①における照査方法、せん断補強筋の無いせん断疲労耐力及び押し抜きせん断については上記②の方法を採用している。従って、③による方法は現在行われていない。

## 4 数値計算

以下のような繰り返し曲げモーメントを受ける鉄筋コンクリートスラブを考える。

表1 コンクリートスラブの諸元

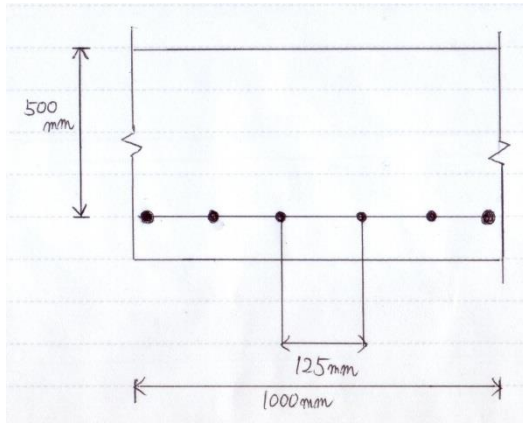


図4 コンクリートスラブの断面

b[mm]		1000
d[mm]		500
鉄筋	D32[mm <sup>2</sup> ]	794.2
	SD345[N/mm <sup>2</sup> ]	345
ctc[mm]		125
コンクリート[N/mm <sup>2</sup> ]		30
Es[kN/mm <sup>2</sup> ]		200
Ec[kN/mm <sup>2</sup> ]		28
作用曲げモーメント[kN・m]	Mp	180
	Mrd	250
安全係数	γc	1.3
	γs	1.0
	γb	1.0
	γi	1.1

### (1) 諸係数の算出

まず、単鉄筋長方形断面として諸係数を算出する。

$$n = \frac{200}{28} = 7.14$$

$$p = \frac{8 \cdot D32}{1000 \cdot 500} = 0.0127$$

$$np = 0.091$$

$$k = -np + \sqrt{n^2 p^2 + 2np} = 0.345$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 0.885$$

$$\sigma'_{cu} = \frac{2M}{kjbd^2} = 2.62 \times 10^{-8} M [N/mm^2]$$

$$\sigma'_s = \frac{M}{pjbd^2} = 3.56 \times 10^{-7} M [N/mm^2]$$

### (2) 設計繰返し回数 $n_d$ に対する材料設計疲労強度の計算

$n_d = 2 \times 10^6$  に対する材料強度を調べる。まず、式(11.5)を用いてコンクリートに対する検討を行う。

$$\text{永久荷重 } M_p \rightarrow \sigma_p = 2.62 \times 10^{-8} M_p \times \frac{3}{4} = 3.54 [N/mm^2]$$

$$\text{変動荷重 } M_{rd} \rightarrow \sigma_{rd} = 2.53 \times 10^{-8} M_{rd} \times \frac{3}{4} = 4.91 [N/mm^2]$$

また、 $f_{rd} = k_{1f} f_{cd} \left(1 - \frac{\sigma_p}{f_d}\right) \left(1 - \frac{\log N}{K}\right) [N/mm^2]$  より、

$$n_d = 2 \times 10^6 \rightarrow f_{rd} = 0.85 \times 23.1 \left(1 - \frac{3.54}{23.1}\right) \left(1 - \frac{\log 2 \times 10^6}{17}\right) = 10.5 [N/mm^2]$$

(※ $k_1=0.85$ 、 $f'_{cd}=f'_{ck}/\gamma_c=23.1$ 、 $K=17$ (普通コンクリート))

以上から、

$$\gamma_i \frac{\sigma_{rd}}{f_{rd}/\gamma_b} = 1.1 \times \frac{4.91}{10.5} = 0.51 < 1.0 \quad O.K.$$

続いて、式(11.6)を用いて引張鉄筋に対する検討を行う。

$$\text{永久荷重 } M_p \rightarrow \sigma_{sp} = 3.56 \times 10^{-7} M_p = 64.1 [N/mm^2]$$

$$\text{変動荷重 } M_{rd} \rightarrow \sigma_{srd} = 3.56 \times 10^{-7} M_{rd} = 89.0 [N/mm^2]$$

$$\text{また、 } f_{srd} = 190 \frac{10^\alpha}{N^k} \left(1 - \frac{\sigma_{sp}}{f_{ud}}\right) [N/mm^2] \text{ より、}$$

$$n_d = 2 \times 10^6 \rightarrow f_{srd} = 190 \frac{10^{0.714}}{(2 \times 10^6)^{0.12}} \left(1 - \frac{64.1}{490}\right) [N/mm^2] = 150 [N/mm^2]$$

$$(\ast \alpha = 1.0 \times (0.81 - 0.003 \times 32) = 0.714, f_{ud} = \frac{490}{1.0} = 490, \gamma_s = 1.0)$$

以上から、

$$\gamma_i \frac{\sigma_{srd}}{f_{srd}} = 1.1 \times \frac{89.0}{150} = 0.65 < 1.0 \quad O.K.$$

### (3) 疲労寿命 N の算出及び n<sub>d</sub> に対する安全性の照査

与えられた M<sub>p</sub>、M<sub>rd</sub> から疲労寿命 N を求める。圧縮コンクリートに対して、M<sub>p</sub>→σ<sub>p</sub>、M<sub>rd</sub>→σ<sub>rd</sub> を用いる。

$$\log N_c = K \left\{ 1 - \frac{\sigma_{rd}}{k_1 f'_{cd} \left(1 - \frac{\sigma_p}{f'_{cd}}\right)} \right\} \text{ より、}$$

$$\log N_c = 17 \left\{ 1 - \frac{4.91}{0.85 \cdot 23.1 \left(1 - 3.54/23.1\right)} \right\} = 12.0$$

$$N_c = 1.00 \times 10^{12} [\text{回}]$$

引張鉄筋に対しては、同様に M<sub>p</sub>→σ<sub>sp</sub>、M<sub>rd</sub>→σ<sub>srd</sub> を用いて、

$$\log N_s = \frac{\left[ \log \left\{ 190 \cdot 10^\alpha \left(1 - \frac{\sigma_{sp}}{f'_{ud}}\right) \right\} - \log \sigma_{srd} \right]}{k} \text{ より、}$$

$$\log N_s = \frac{\left[ \log \left\{ 190 \cdot 10^{0.714} \left(1 - \frac{64.1}{490}\right) \right\} - \log 89.0 \right]}{0.12} = 8.17$$

$$N_s = 1.48 \times 10^8$$

以上の結果より、疲労寿命に対する照査として式(11.27)を用いて、  
コンクリート

$$\gamma_i \frac{\log n_d}{\log N_c} = 0.58 < 1.0 \quad O.K.$$

鉄筋

$$\gamma_i \frac{\log n_d}{\log N_s} = 0.85 < 1.0 \quad O.K.$$

### (4) 照査の一覧化と S-N 線図の図示

数値計算及び各照査の一覧を示したものを以下の表 2 に記す。

表 2 照査の一覧

材料の種類別	圧縮コンクリート( $f_{cd}=30/1.3$ )			引張鉄筋( $f_{ud}=490/1.0$ )		
	断面力/断面耐力	応力度/強度	繰返し回数/ 疲労強度	断面力/断面耐力	応力度/強度	繰返し回数/ 疲労強度
単位	kN・m	N/mm <sup>2</sup>	回	kN・m	N/mm <sup>2</sup>	回
設計断面力 $M_{rd}$	$M_p=180$	$\rightarrow\sigma_p=3.54$	↓	$M_p=180$	$\rightarrow\sigma_{sp}=64.1$	↓
↓ 応答応力 $\sigma_{rd}$	$M_{rd}=250$	$\rightarrow\sigma_{rd}=4.91$ ( $\sigma'_c=3/4\sigma'_{cu}$ )	↓	$M_{rd}=250$	$\rightarrow\sigma_{srd}=89.0$	↓
↓ 疲労寿命 $N$			$N_c=1.00\times 10^{12}$ (疲労寿命)			$N_s=1.48\times 10^8$ (疲労寿命)
設計繰返し回数 $n$	$M_p=180$	$\rightarrow\sigma_p=3.54$	↓	$M_p=180$	$\rightarrow\sigma_{sp}=64.1$	↓
↓ 設計疲労強度 $f_{rd}$	$R_{rd}=553$	$\leftarrow f_{rd}=10.5$ ( $\sigma'_c=3/4\sigma'_{cu}$ )	$\leftarrow n_d=2.00\times 10^6$ (設計繰返し回数 $n_d$ )	$R_{rd}=421$	$\leftarrow f_{srd}=150$ ( $\sigma'_c=3/4\sigma'_{cu}$ )	$\leftarrow n_d=2.00\times 10^6$ (設計繰返し回数 $n_d$ )
↓ 設計疲労耐力 $R_{rd}$						
安全性の照査 ( $\gamma_i=1.1$ とする)	$\frac{\gamma_i \sigma_{rd}}{R_{rd}}=0.50$	$\frac{\gamma_i \sigma_{rd}}{f_{rd}}=0.51$	$\frac{\gamma_i \log n_d}{\log N_c}=0.58$	$\frac{\gamma_i \sigma_{srd}}{R_{rd}}=0.65$	$\frac{\gamma_i \sigma_{srd}}{f_{srd}}=0.65$	$\frac{\gamma_i \log n_d}{\log N_s}=0.85$

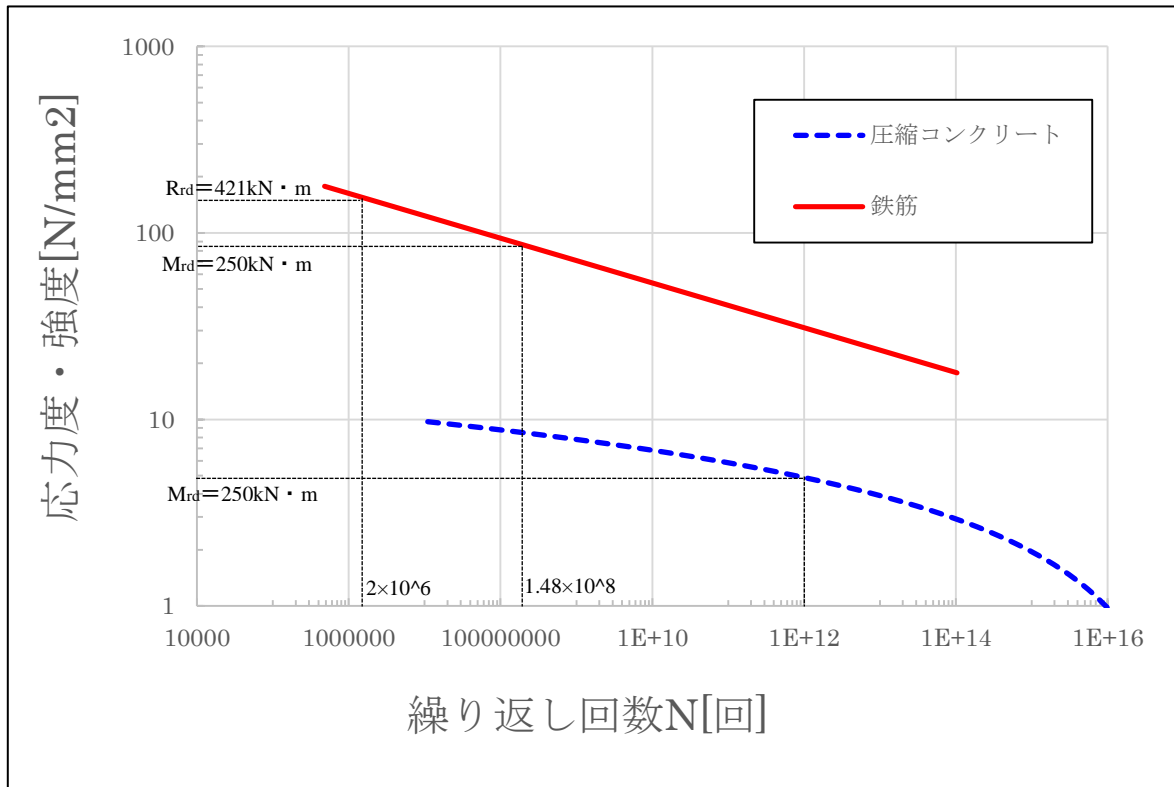


図 5 照査における S-N 線図(点線：鉄筋、棒線：コンクリート)

## 5 考察

- ・繰返し曲げモーメント値を設定したコンクリートスラブにおいて、断面力及び応力度から疲労寿命を算出



- し、また設計繰り返し回数から強度と断面耐力の計算を行った。そして同時に安全性の照査も行った
- 圧縮コンクリート、鉄筋いずれにおいても応力レベル、断面力レベル、回数による照査は 1.0 を下回ったため、安全であると判断することができる。
  - 圧縮コンクリートの断面力レベルによる照査と応力レベルによる照査で値が 0.01 異なっているが、有効数字の影響であり、誤差の範囲内といえる。
  - 図 5 より、鉄筋における設計応力度・強度と繰り返し回数との関係は両対数にすることで線形となり、式 (11.6b) が正しく表されたと言える。

#### 参考文献

吉川弘道 鉄筋コンクリートの解析と設計 丸善 第 11 章 pp245-262 2004